Triangles autopolaires, applications à l'hyperbole équilatère

G.Huvent

Gery.Huvent@mail.ac-lille.fr

26 juin 2000

Résumé

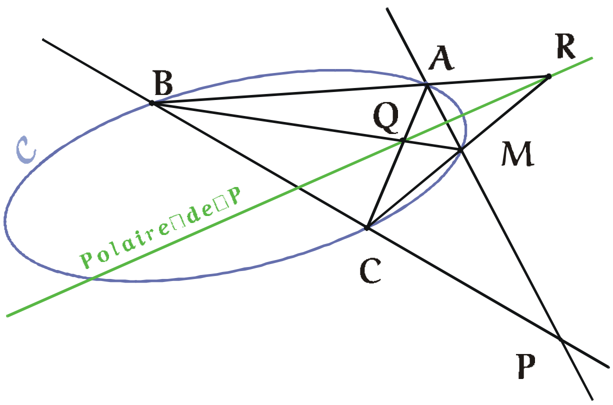
Deux triangles autopolaires par rapport à une même conique ont leurs sommets sur une même conique. Ce résultat de Poncelet, dans le cas de l'hyperbole équilatère, est à l'origine de nombreuses propriétés.

1 Rappels

On se place dans un plan euclidien que l'on a complexifié et dont on prend la complétion projective. On suppose connue la notion de polaire d'un point par rapport à une conique et la construction de cette polaire. On consultera à ce sujet :

http ://www.cabri.net/abracadabri/Coniques/Guillerault/Polaire.html

On rappelle que pour construire la polaire du point P par rapport à une conique $\mathcal{C}$, il suffit de considérer deux droites passant par P qui coupe $\mathcal{C}$ respectivement en B, C et A, M. Les droites AC et BM se coupent en Q , AB et CM en R, la polaire de P est alors la droite QR (le choix des notations sera plus clair dans le paragraphe suivant).



Par définition du centre d'une conique, la polaire du centre d'une conique est la droite à l'infini.
Un triangle PQR est dit autopolaire pour la conique $\mathcal{C}$ si la polaire de chaque sommet coïncide avec le côté opposé (ou, ce qui revient au même, si le pôle de chaque côté coïncide avec le sommet opposé). On dit aussi que le triangle est conjugué pour la conique.

On suppose également connue la notion de points cycliques. En particulier une conique qui passe par les points cycliques est un cercle. On notera I et J les points cycliques.
Un foyer d'une conique est un point d'où l'on peut mener deux tangentes à la conique qui passent par les

points cycliques.
Un triangle Δ est dit inscrit à une conique $\mathcal{C}$ (on dit aussi que la conique $\mathcal{C}$ est circonscrite au triangle Δ) si chaque sommet de Δ est sur $\mathcal{C}$. De même un triangle Δ est dit circonscrit à une conique $\mathcal{C}$ (on dit aussi que la conique $\mathcal{C}$ est inscrite dans le triangle Δ) si chaque côté de Δ est tangent à $\mathcal{C}$.

2 Un théorème de Poncelet[1]

Le théorème suivant est à la base de tous les résultats qui vont suivre :

Théorème 1 *(Poncelet) Les six sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont situés sur une même conique.*

Preuve. *Soient PQR et $P'Q'R'$ deux triangles autopolaires par rapport à une conique $\mathcal{C}$. On choisit le triangle PQR comme triangle de référence de façon à ce qu'un système de coordonnées homogènes de P, Q et R soit, respectivement, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. On note (x_1, y_1, z_1) un système de coordonnées homogènes de P'(les indices 2 et 3 correspondant à celles de Q' et R').*
L'équation de $\mathcal{C}$ est alors de la forme $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ (PQR est autopolaire pour $\mathcal{C}$). La condition pour que $P'Q'R'$ soit autopolaire s'écrit alors

$$\begin{aligned} ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 &= 0 \\ ax_2x_3 + by_2y_3 + cz_2z_3 &= 0 \\ ax_1x_3 + by_1y_3 + cz_1z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les nombres a, b et c ne sont pas tous nuls, la matrice A est donc singulière, son déterminant est nul.

Remarque 2 *Plus généralement il existe une conique $\mathcal{C}$ telle que les deux triangles PQR et $P'Q'R'$ sont autopolaires pour $\mathcal{C}$.si et seulement si la matrice A construite avec les coordonnées homogènes des points P', Q' et R' est singulière.*

On cherche maintenant une conique $\mathcal{C}'$ d'équation $a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 + dXY + eYZ + fZX = 0$ circonscrite aux deux triangles PQR et $P'Q'R'$ (i.e qui passe par les six sommets). P, Q et R sont sur cette conique donc $a' = b' = c' = 0$. La condition pour que P', Q' et R' soient aussi sur $\mathcal{C}'$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} dx_1y_1 + ey_1z_1 + fz_1x_1 &= 0 \\ dx_2y_2 + ey_2z_2 + fz_2x_2 &= 0 \\ dx_3y_3 + ey_3z_3 + fz_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1y_1 & y_1z_1 & z_1x_1 \\ x_2y_2 & y_2z_2 & z_2x_2 \\ x_3y_3 & y_3z_3 & z_3x_3 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1] Poncelet Jean-Victor (Metz 1788-Paris 1867)

Il existe des réels d, e *et* f *non tous nuls (et donc une conique* $\mathcal{C}'$ *qui répond à la question) si et seulement si la matrice* A' *est singulière i.e de déterminant nul.*

Remarque 3 *Plus généralement il existe une conique* $\mathcal{C}'$ *circonscrite aux deux triangles* PQR *et* $\mathsf{P'Q'R'}$ *si et seulement si les points* $\mathsf{P'}, \mathsf{Q'}$ *et* $\mathsf{R'}$ *sont tels que la matrice* $\mathsf{A'}$ *construite avec les coordonnées homogènes est singulière.*

Il suffit maintenant de constater que $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A'})$ *pour conclure au résultat plus général suivant :*

Théorème 4 *Soient* PQR *et* $\mathsf{P'Q'R'}$ *deux triangles, alors les conditions suivantes sont équivalentes*
(a) *Il existe une conique* $\mathcal{C}$ *telle que les deux triangles sont autopolaires pour* $\mathcal{C}$
(b) *Il existe une conique* $\mathcal{C}'$ *qui passe par les six sommets de ces deux triangles*

Pour une preuve géométrique, je renvoie le lecteur à [Charles Michel]. La démonstration utilise la notion d'involution de Desargues. ■

Par application du principe de dualité, on obtient

Théorème 5 (dual) *Les six côtés de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont tangents à une même conique.*
Plus généralement, soient PQR *et* $\mathsf{P'Q'R'}$ *deux triangles, alors les conditions suivantes sont équivalentes*
(a) *Il existe une conique* $\mathcal{C}$ *telle que les deux triangles sont autopolaires pour* $\mathcal{C}$
(b) *Il existe une conique* $\mathcal{C}'$ *qui est tangente aux six côtés de ces deux triangles*

Par application des deux théorèmes précédents il existe une conique inscrite aux deux triangles (i.e tangente aux six côtés) si et seulement s'il existe une conique circonscrite aux deux triangles (i.e qui passe par les six sommets)
En particulier, soit $\Delta = \mathsf{ABC}$ un triangle et $\mathcal{P}$ une parabole inscrite dans Δ, le triangle FIJ où F est le foyer de $\mathcal{P}$ est circonscrit à $\mathcal{P}$. En effet la droite IJ est tangente à $\mathcal{P}$ (c'est la droite à l'infini), et F est un point d'où l'on peut mener deux tangentes à $\mathcal{P}$ qui passent par les points cycliques. On en déduit que les six points $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{I}$ et J sont sur une même conique (qui est donc un cercle). On a donc retrouvé le résultat suivant

Proposition 6 *Soit* Δ *un triangle circonscrit à une parabole* $\mathcal{P}$ *alors le cercle circonscrit à* Δ *passe par le foyer de* $\mathcal{P}$.

Remarque 7 *On pourra consulter aussi :*
http ://www.cabri.net/abracadabri/GeoPlane/Cocyclik/SimpSte2.htm

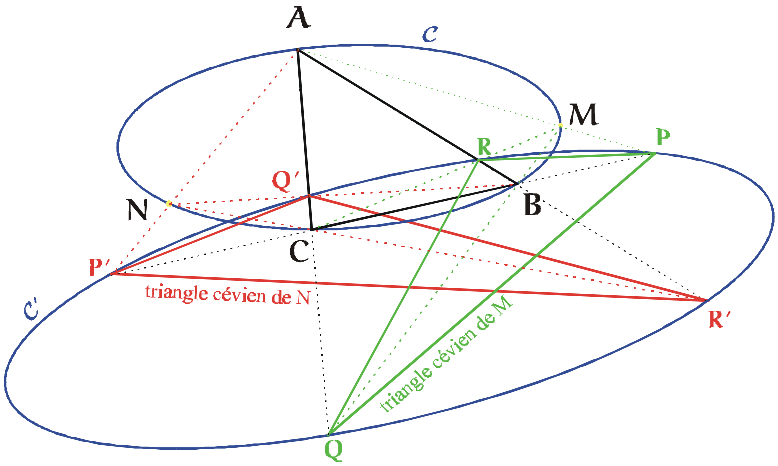
2.1 Triangle cévien d'un point M par rapport à un triangle inscrit dans une conique

Reste à trouver des triangles autopolaires qui présentent un intérêt !
On peut toujours fabriquer des triangles autopolaires en choisissant P qui n'est pas sur la conique $\mathcal{C}$, Q sur la polaire de P et non sur $\mathcal{C}$ et R à l'intersection des polaires de P et Q.

Definition 8 *Soit* $\Delta = \mathsf{ABC}$ *un triangle et* M *un point distinct des sommets de* Δ, *les céviennes* AM, BM *et* CM *coupent les côtés* BC, AC *et* AB *en trois points* PQR. *Le triangle* PQR *est dit triangle cévien de* M *par rapport à* Δ. *Le cercle circonscrit du triangle cévien* PQR *est dit cercle cévien de* M *par rapport à* Δ.

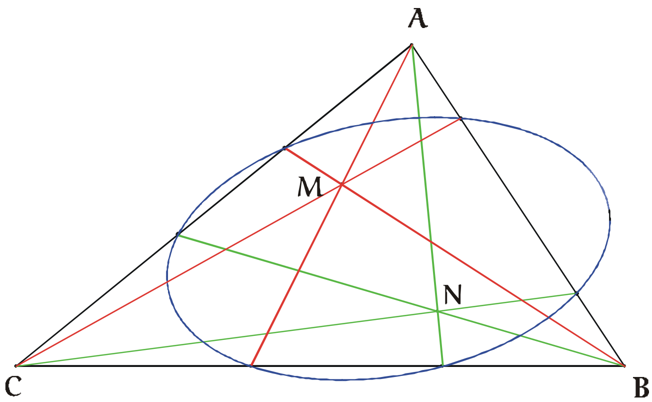
Lorsque le triangle ABC est inscrit dans une conique $\mathcal{C}$ et que le point M est aussi sur $\mathcal{C}$, on constate que le triangle PQR est autopolaire pour $\mathcal{C}$. On a donc le résultat suivant :

Proposition 9 *Soit Δ un triangle inscrit dans une conique $\mathcal{C}$ et M et N deux points de $\mathcal{C}$.*
Les six sommets des triangles céviens de M et N sont sur une même conique $\mathcal{C}'$ et (proposition duale) les six côtés des triangles cévien de M et N sont tangents à une même conique.



Remarque 10 *On retrouve ainsi un résultat bien connu :*

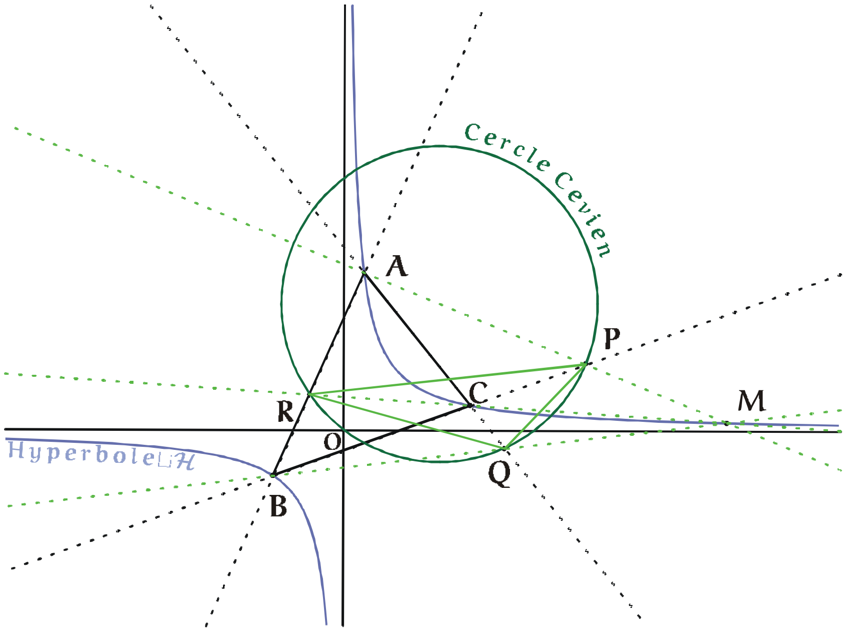
Proposition 11 *Soit ABC un triangle et M, N deux points non situés sur ce triangle. Les six sommets des triangles céviens de M et N par rapport à ABC sont sur une même conique. (Il suffit de considérer la conique $\mathcal{C}$ qui passe par les cinq points $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{M}$ et N)*



2.1.1 Application à l'hyperbole équilatère

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on dispose déjà d'un triangle autopolaire très particulier :
Le triangle OIJ où I et J sont les points cycliques.
On en déduit que le cercle circonscrit à tout triangle autopolaire pour une hyperbole équilatère passe par le centre O de cette hyperbole. En particulier, on a la

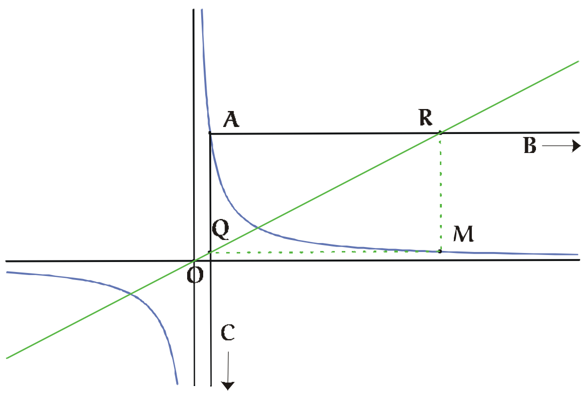
Proposition 12 *Soit Δ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et M un point de $\mathcal{H}$. Le cercle cévien de M par rapport à Δ passe par le centre O de $\mathcal{H}$.*
En particulier pour $\mathsf{M} = \mathsf{H}$ l'orthocentre de Δ (dont on sait qu'il est sur $\mathcal{H}$), on retrouve le fait que le cercle d'Euler de Δ passe par O.



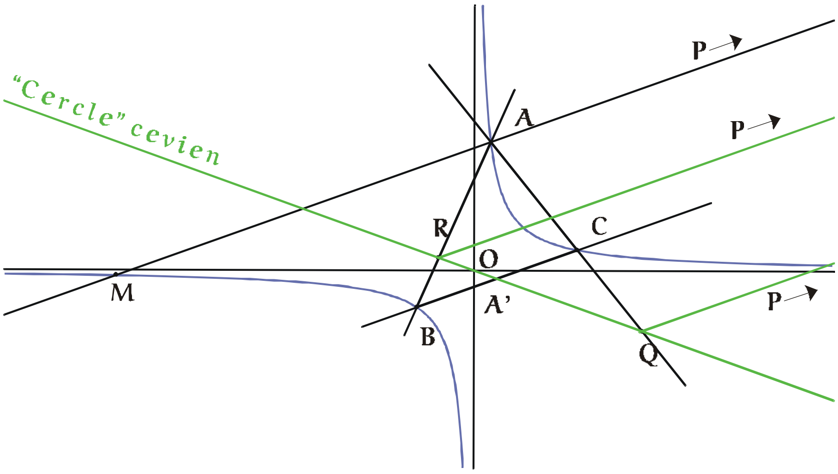
Quelques cas particuliers

Cas où B et C sont les deux points à l'infini de $\mathcal{H}$. Dans ce cas les droites BM et CM sont les parallèles aux asymptotes issues de M. Elles coupent les parallèles aux asymptotes issues de A (qui sont les droites AB et AC) en deux points Q et R. Le cercle cévien dégénère en deux droites : PQ et la droite à l'infini. La droite PQ passe donc par O. On retrouve ainsi une propriété de l'hyperbole (cette propriété est aussi vraie pour une hyperbole quelconque) :

Propriété 13 *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère d'asymptotes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Soient A et M deux points de $\mathcal{H}$. On trace la parallèle à $\mathcal{D}_1$ (resp $\mathcal{D}_2$) issue de A, elle coupe la parallèle à $\mathcal{D}_2$ (resp $\mathcal{D}_1$) issue de M en Q (resp R). Alors la droite QR passe par le centre de $\mathcal{H}$.*

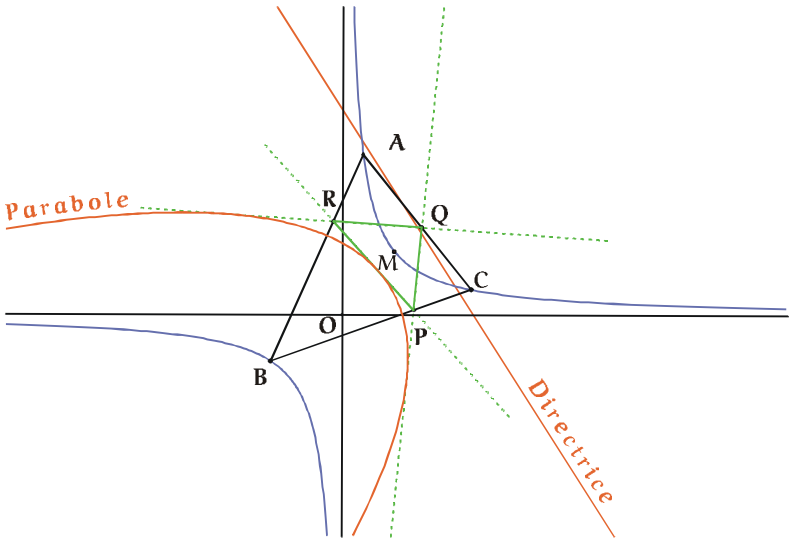


Cas où un des points du triangle cévien est à l'infini Si M est sur la parallèle à BC issue de A (et $M \neq A$), alors le point P est à l'infini. Le cercle cévien dégénère en la droite OA' où A' est le milieu de [BC].



2.1.2 Conique tangente aux côtés d'un triangle cévien et de foyer O

L'application de la proposition duale assure que les trois côtés du triangle cévien de M, les droites OI, OJ et IJ sont tangentes à une même conique. Cette conique est donc une parabole (la droite IJ,qui est la droite à l'infini, est une tangente) qui a pour foyer O (on peut mener de O deux tangentes qui passent par les points cycliques, c'est la définition de Plücker des foyers).
En particulier le foyer O est sur le cercle circonscrit à PQR, on retrouve le fait que le cercle cévien de M passe par O. De plus la directrice est la droite de Steiner de O par rapport au triangle cévien.



On a donc le résultat suivant :

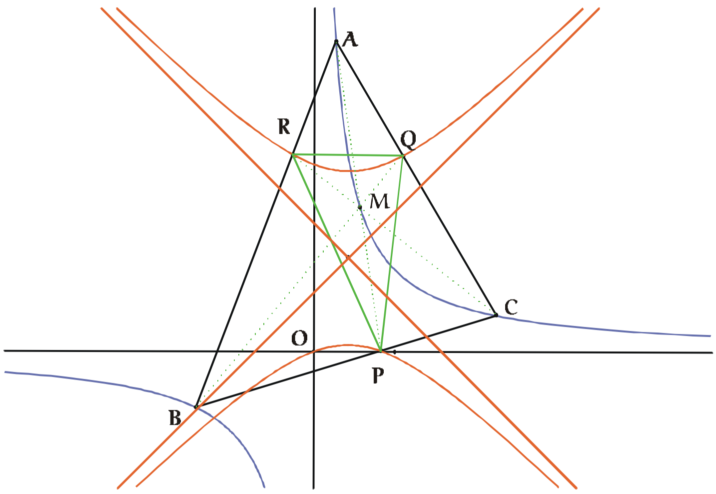
Proposition 14 *Soit Δ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et M un point de $\mathcal{H}$. La conique de foyer le centre O de $\mathcal{H}$ et qui est tangente aux trois côtés du triangle cévien de M est une parabole (cette conique est bien unique, car on connaît cinq tangentes)*

2.1.3 Hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère OPQR

Il existe un autre triangle autopolaire pour l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$: le triangle OXY où X et Y sont les points à l'infini des axes de l'hyperbole (X correspond à l'axe focal). Dans ce cas la conique qui passe par les points $\mathsf{O}, \mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}, \mathsf{X}$ et Y est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de $\mathcal{H}$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 15 *Soit Δ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et M un point de $\mathcal{H}$. L'hyperbole équilatère qui passe par les sommets du triangle cévien de M par rapport à Δ, et par le centre O de $\mathcal{H}$ a ses asymptotes parallèles aux axes de $\mathcal{H}$.*

Remarque 16 *Le quadrilatère OPQR n'est jamais orthocentrique car O n'est pas l'orthocentre de PQR (il est sur le cercle cévien).*



3 Coniques harmoniquement inscrites et circonscrites

On introduit maintenant la notion de conique harmoniquement inscrite ou circonscrite à une autre conique.

Dans tous ce paragraphe, les coniques sont supposées propres (i.e non décomposées)

3.1 Définitions

Definition 17 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques, on dit que $\mathcal{C}'$ est harmoniquement circonscrite à $\mathcal{C}$ s'il existe un triangle autopolaire pour $\mathcal{C}$ et inscrit à $\mathcal{C}'$ (donc tel que $\mathcal{C}'$ lui soit circonscrite).*

Definition 18 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques, on dit que $\mathcal{C}'$ est harmoniquement inscrite à $\mathcal{C}$ s'il existe un triangle autopolaire pour $\mathcal{C}$ et circonscrit à $\mathcal{C}'$ (donc tel que $\mathcal{C}'$ lui soit inscrite).*

3.2 Théorème d'équivalence

On donne maintenant une caractérisation algébrique des coniques harmoniquement circonscrites (resp. inscrites) à une autre.

3.2.1 Caractérisation algébrique des coniques harmoniquement circonscrites à une autre

Par choix d'un repère projectif, les deux coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont représentées par des matrices symétriques inversibles A et B. Le changement de repère remplace A et B par des matrices congruentes. Cependant les deux réels $\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right)$ et $\operatorname{tr}\left(B^{-1}A\right)$ sont inchangés. Ces deux invariants vont caractériser les coniques harmoniquement inscrites ou circonscrites.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques telles que $\mathcal{C}'$ est harmoniquement circonscrite à $\mathcal{C}$. Soit PQR un triangle autopolaire pour $\mathcal{C}$ et inscrit à $\mathcal{C}'$. On choisit le triangle PQR comme triangle de référence de façon à ce que qu'un système de coordonnées homogènes de P, Q et R soit respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. L'équation de $\mathcal{C}$ est alors de la forme $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ et celle de $\mathcal{C}'$ est $2dXY + 2eYZ + 2fZX = 0$. Ainsi $\mathcal{C}$ est représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}'$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ d & 0 & e \\ f & e & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right) = 0$.

Réciproquement, si $\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right) = 0$, soit P un point de $\mathcal{C}'$ (et $P \notin \mathcal{C}$), la polaire de P par rapport à $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}'$ en deux points Q et R. On choisit PQR comme triangle de référence. La conique $\mathcal{C}'$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & d & f \\ d & 0 & e \\ f & e & 0 \end{pmatrix}$ (car P, Q et R sont sur $\mathcal{C}'$).

Les points Q et R sont sur la polaire de P, ainsi $\mathcal{C}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$ et on doit avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta = 0.$$

$\mathcal{C}$ est donc représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & \gamma & c \end{pmatrix}$. Mais alors

$\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & d & f \\ d & 0 & e \\ f & e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & \gamma & c \end{pmatrix}^{-1}\right) = 2e\dfrac{e\gamma}{\gamma^2 - bc} = 0$. On en déduit que $\gamma = 0$ car $e \neq 0$ (en effet $\det(B) = 2dfe \neq 0$).

On vient donc d'établir le résultat suivant

Théorème 19 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques représentées par les matrices A et B, alors $\mathcal{C}'$ est harmoniquement circonscrite à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right) = 0$.*

Exemple 20 *Un cercle est harmoniquement circonscrit à une hyperbole équilatère si et seulement s'il passe par le centre de l'hyperbole. Ce résultat est immédiat (prendre le triangle OIJ) et peut également se prouver par la caractérisation avec la trace.*

Remarque 21 *On a prouvé au passage que si il existe un triangle à la fois inscrit dans une conique $\mathcal{C}'$ et autopolaire pour $\mathcal{C}$, alors il en existe une infinité. On peut les construire ainsi : on prend P sur $\mathcal{C}'$, la polaire de P par rapport à $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}'$ en Q et R.*

On peut se poser la question de savoir quand une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ est harmoniquement circonscrite à un cercle $\mathcal{C}$. On peut y répondre par un calcul algébrique. Dans un repère adapté la matrice de $\mathcal{H}$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix}$ (l'équation de $\mathcal{H}$ est $2XY - k^2Z^2 = 0$) et la matrice de $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f \\ 0 & 1 & e \\ f & e & (e^2+f^2-R^2) \end{pmatrix}$ (l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2 + Y^2 + 2eYZ + 2fXZ + \left(e^2 + f^2 - R^2\right) Z^2$, le centre a pour coordonnées homogènes $(-e, -f, 1)$). Un calcul simple donne $\operatorname{tr}\left(BA^{-1}\right) = \frac{k^2-2ef}{R^2}$. On a donc la caractérisation suivante :

Proposition 22 *Une hyperbole équilatère est harmoniquement circonscrite à un cercle si et seulement si le centre du cercle est situé sur l'hyperbole équilatère.*

Remarque 23 *On peut prouver géométriquement ce résultat en considérant le triangle de sommets le centre du cercle et les deux points à l'infini de l'hyperbole équilatère. Ce triangle est autopolaire pour le cercle (car les asymptotes sont orthogonales) et est inscrit à l'hyperbole si et seulement si le centre du cercle est situé sur l'hyperbole.*

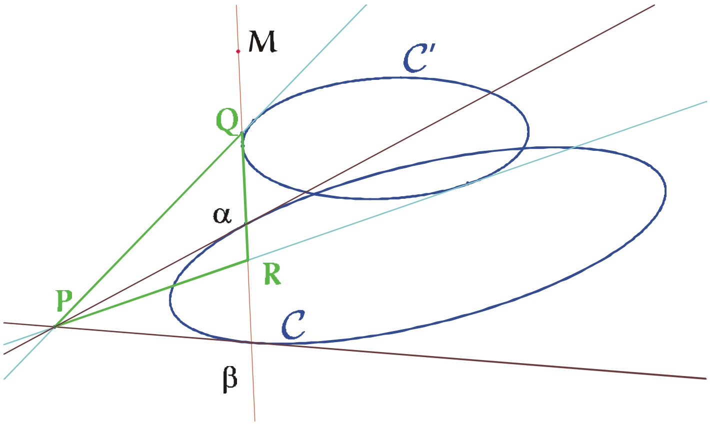
Remarque 24 *On sait que si un triangle est autopolaire pour un cercle, alors le centre du cercle est l'orthocentre de ce triangle. Soit donc Δ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère, il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que Δ est autopolaire pour ce cercle. L'hyperbole est donc harmoniquement circonscrite à $\mathcal{C}$, elle passe par le centre de $\mathcal{C}$. On retrouve ainsi un résultat connu :*
L'orthocentre de tout triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est sur cette hyperbole (le cercle $\mathcal{C}$ est réel si le triangle a un angle obtus).
Réciproquement soient Δ un triangle et $\mathcal{H}$ une hyperbole passant par les sommets de Δ et par son orthocentre H. Soit $\mathcal{C}$ le cercle tel que Δ lui soit autopolaire, le centre de $\mathcal{C}$ est le point H. On peut construire un autre triangle autopolaire pour $\mathcal{C}$: la polaire de H par rapport à $\mathcal{C}$ (qui est la droite à l'infini) coupe $\mathcal{H}$ en ses points à l'infini X et Y. Le triangle HXY est autopolaire pour $\mathcal{C}$, puisque H est le centre de $\mathcal{C}$ les droites HX et HY sont orthogonales. L'hyperbole est donc équilatère.

3.2.2 Caractérisation algébrique des coniques harmoniquement inscrites à une autre

Rappel : Soit $\mathcal{C}$ une conique propre de matrice A, une droite $\mathcal{D}$ d'équation $UX+VY+WZ=0$ est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si ${}^tDA^{-1}D = 0$ où $D = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ (équation tangentielle de la conique)

Interprétation du second invariant Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques telles que $\mathcal{C}'$ est harmoniquement inscrite à $\mathcal{C}$. Soit PQR un triangle autopolaire pour $\mathcal{C}$ et circonscrit à $\mathcal{C}'$. On choisit le triangle PQR comme triangle de référence. L'équation de $\mathcal{C}$ est alors de la forme $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ et l'équation tangentielle de $\mathcal{C}'$ est $2dUV + 2eVW + 2fWU = 0$. Ainsi $\mathcal{C}$ est représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}'$ par B tel que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ d & 0 & e \\ f & e & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\operatorname{tr}\left(B^{-1}A\right) = 0$.

Réciproquement, si $\operatorname{tr}\left(B^{-1}A\right) = 0$, soit M un point quelconque d'où la tangente à $\mathcal{C}'$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts α et β. Les tangentes à $\mathcal{C}$ en α et β se coupent en P. Les deux tangentes à $\mathcal{C}'$ issues de P définissent les points Q et R par intersection avec la droite $(\alpha\beta)$. On va prouver que le triangle PQR est autopolaire pour $\mathcal{C}$ (il est, par construction, circonscrit à $\mathcal{C}'$). On choisit PQR comme triangle de référence.



Le triangle PQR est circonscrit à la conique $\mathcal{C}'$; ainsi $\mathcal{C}'$ a pour matrice $\mathsf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ d & 0 & e \\ f & e & 0 \end{pmatrix}$. Puis il est clair que la polaire de P par rapport à $\mathcal{C}$ est la droite QR ; ainsi $\mathcal{C}$ est représenté par la matrice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & g \\ 0 & g & c \end{pmatrix}$. La fin de la preuve se fait comme précédemment.
On vient donc d'établir le résultat suivant

Théorème 25 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques représentées par les matrices A et B, alors $\mathcal{C}'$ est harmoniquement inscrite à $\mathcal{C}$ si et seulement si* $\mathrm{tr}\left(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}\right) = 0$.

3.2.3 Applications

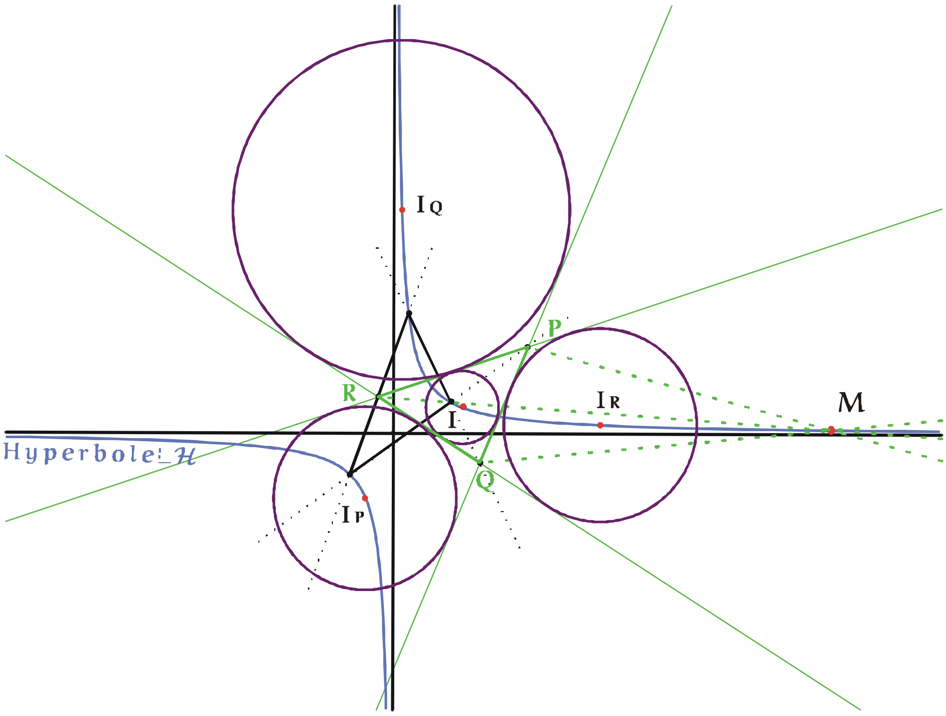
On en déduit l'équivalence suivante :

Théorème 26 (d'équivalence) *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques, $\mathcal{C}'$ est harmoniquement circonscrite à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est harmoniquement inscrite à $\mathcal{C}'$.*

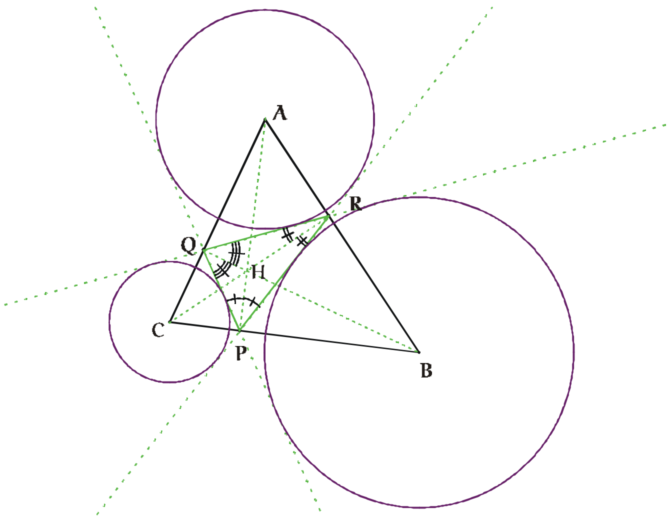
On a vu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbole équilatère soit harmoniquement circonscrite à un cercle est qu'elle passe par le centre du cercle (cf proposition 22, page 9). On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle soit harmoniquement inscrit à une hyperbole équilatère est que son centre soit sur cette hyperbole.
Ce résultat permet d'établir la

Proposition 27 *Soit Δ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et M un point de $\mathcal{H}$. Les centres $I, I_{\mathsf{P}}, I_{\mathsf{Q}}$ et I_{R} des cercles inscrits et exinscrits du triangle cévien PQR de M par rapport à Δ sont sur $\mathcal{H}$.*

Remarque 28 *En particulier le cercle d'Euler du triangle $I_{\mathsf{P}}I_{\mathsf{Q}}I_{\mathsf{R}}$ passe par le centre de l'hyperbole $\mathcal{H}$, mais ce cercle est le cercle cévien de M par rapport à Δ !*



Remarque 29 *Dans le cas où le point* M *est l'orthocentre* H *du triangle* $\Delta = \mathsf{ABC}$, *le triangle cévien est appelé triangle orthique de* Δ. *L'hyperbole* $\mathcal{H}$ *passe par les quatre points* $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ *et* H *mais aussi par les quatre points* $\mathrm{I}, \mathrm{I}_{\mathsf{P}}, \mathrm{I}_{\mathsf{Q}}$ *et* I_{R} *(les centres des cercles inscrits et exinscrits du triangle orthique). Toutes les hyperboles du faisceau à points de base* $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ *et* H *passent donc par ces huit points. Ces deux ensembles de quatre points sont donc les mêmes. On retrouve le fait que les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices de son triangle orthique.*



Références

[Charles Michel] Charles Michel *Compléments de géométrie moderne*
Editions Jacques Gabay (1995)

[Gramain André] Gramain André *Géométrie élémentaire*
Hermann (1999)

[Cagnac] Cagnac G, Ramis E, Commeau J *Nouvau cours de Mathématiques spéciales, tome 3, géométrie*
Masson & C^ie^ (1967)

[Sidler Jean-Claude] Sidler Jean-Claude *Géométrie projective*
InterEditions (1993)

[Sortais Yvonne et René] Sortais Yvonne et René *La géométrie du triangle*
Hermann (1987)