Intersection d'une conique et d'un cercle

P. Delezoide

1 Juin 1998

1 Outils analytiques

1.1 Préliminaires

Si u, v sont des complexes, leur produit scalaire est la partie réelle de $\bar{u}\, v$.

1.2 Equation complexe d'une conique

On munit le plan affine eulidien orienté d'un repère orthonormé direct, par rapport auquel les coordonnées sont notées x et y et l'affixe z. En écrivant $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \bar{z})$, on voit que l'équation générale d'une conique s'écrit :

$$\bar{\alpha}\, z^2 + \alpha\, \bar{z}^2 + \bar{\beta}\, z + \beta\, \bar{z} + 2\, r\, z\, \bar{z} + 2\, s = 0 \ , \tag{1}$$

où α, β sont des complexes, r, s des réels ($(\alpha, r) \neq (0,0)$). Autrement dit en utilisant le produit scalaire :

$$\left\langle \alpha \mid z^2 \right\rangle + \langle \beta \mid z \rangle + r \langle z \mid z \rangle + s = 0 \ .$$

1.3 Intersection avec le cercle unité

On suppose $\alpha \neq 0$ (sinon la conique est un cercle, ou l'ensemble vide), on voit que le faisceau linéaire engendré par cette conique et le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon 1 contient la conique d'équation complexe :

$$\bar{\alpha}\, z^2 + \alpha\, \bar{z}^2 + \bar{\beta}\, z + \beta\, \bar{z} + 2\, r + 2\, s = 0 \ .$$

Cette conique est une hyperbole équilatère; en effet l'équation asymptotique est $2 \left\langle \alpha \mid z^2 \right\rangle = 0$, les directions asymptotiques sont dirigées par les racines carrées du complexe $\mathrm{i}\alpha$, et les axes de symétrie par celles de α. L'équation de l'hyperbole s'écrit aussi :

$$\bar{\alpha}\, z^2 + \bar{\beta}\, z + r + s \in \mathrm{i}\mathbf{R} \ ,$$

soit encore :

$$\bar{\alpha} \left(z + \frac{\bar{\beta}}{2\, \bar{\alpha}} \right)^2 - \frac{\bar{\beta}^2}{4\, \bar{\alpha}} + r + s \in \mathrm{i}\mathbf{R} \ .$$

Sous cette forme il est clair que le point d'affixe $-\frac{\bar\beta}{2\,\bar\alpha}$ est centre de symétrie de l'hyperbole, donc son centre.

En reportant la condition $\bar z = 1/z$ dans l'équation complexe (1) de la conique, on trouve que le complexe z est affixe d'un point d'intersection de la conique et du cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si, les conditions :

$$(S) \qquad \bar\alpha\, z^2 + \alpha\, z^{-2} + \bar\beta\, z + \beta\, z^{-1} + 2\,(r+s) = 0 \quad \text{et} \quad z\,\bar z = 1\ ,$$

sont vérifiées. La première condition s'écrit $P(z) = 0$, où P est le polynôme :

$$P(X) = \bar\alpha\, X^4 + \bar\beta\, X^3 + 2\,(r+s)\, X^2 + \beta\, X + \alpha\ .$$

Si z est zéro de P, $1/\bar z$ aussi; on voit donc que l'application involutive $z \mapsto 1/\bar z$, induit sur les zéros de P une permutation involutive σ. Supposons que les zéros de P soient distincts; si σ est l'identité, il y a 4 solutions (réelles) au système (S); si σ est une transposition, il y a deux solutions réelles qui correspondent aux deux points fixes; si σ est un produit de deux transpositions, il n'y a pas de solutions réelles.

2 Application à la trisection d'un angle

2.1

Soit u un complexe de module 1; on note $C(u)$ le corps des complexes constructibles à la règle et au compas à partir de 1 et u. On suppose que u n'est pas trisecable, c'est-à-dire qu'une quelconque des racines cubiques de u n'est pas dans $C(u)$ (la constructibilité de l'une implique la constructibilité des autres). Autrement dit le polynôme $X^3 - u$ (de degré 3!) est irréductible dans $C(u)[X]$, et c'est le polynôme minimal sur $C(u)$ d'une quelconque racine cubique de u.

On cherche une conique passant par 5 points d'affixes appartenant à $C(u)$, dont l'une des intersections avec le cercle $\mathcal{C}$ soit une racine cubique de u.

On a des équations de la forme (1) d'une telle conique, où α, β, r, s sont éléments éléments de $C(u)$ (par résolution d'un système linéaire). Par hypothèse l'un des zéros du polynôme $P \in C(u)[X]$ est une racine cubique de u, donc P est un multiple de $X^3 - u$ (irréductible). Les trois racines cubiques de u sont zéros de P; le quatrième zéro de P est alors nécessairement aussi de module 1 (le produit des zéros est $\alpha/\bar\alpha$, de module 1). Cela signifie géométriquement que l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la conique est nécessairement composée des 3 racines cubiques de u, qui forment un triangle équilatéral, et d'un quatrième point.

En remplaçant X^3 par u dans le polynôme P on obtient le reste de P dans la division euclidienne par $X^3 - u$; la CNS cherchée est que ce reste est nul, c'est-à-dire :

$$2(r+s)\, X^2 + (\bar\alpha\, u + \beta)\, X + \bar\beta\, u + \alpha = 0\ .$$

Comme u est de module 1, on trouve seulement les deux conditions $s = -r$ et $\beta = -\bar\alpha\, u$.

Les équations des coniques cherchées sont donc de la forme :

$$\bar{\alpha}\, z^2 + \alpha\, \bar{z}^2 - \alpha\, \bar{u}\, z - \bar{\alpha}\, u\, \bar{z} + 2\, r(z\, \bar{z} - 1) = 0\ .$$

On a alors :

$$P(X) = \bar{\alpha}\, X^4 - \alpha\, \bar{u}\, X^3 - \bar{\alpha}\, u\, X + \alpha = (X^3 - u)\, (\bar{\alpha}\, X - \alpha\, \bar{u})\ .$$

On voit donc que la quatrième intersection de la conique avec le cercle $\mathcal{C}$ est d'affixe $\alpha\, \bar{u}/\bar{\alpha}$ (ce qui pouvait bien entendu s'obtenir de bien des manières).

2.2

Parmi les coniques possibles on choisit les hyperboles équilatères obtenues pour $r = 0$; ces hyperboles dépendent d'un paramètre complexe α, qu'on peut supposer de module 1. L'équation d'une telle hyperbole est :

$$\bar{\alpha}\, z^2 + \alpha\, \bar{z}^2 - \alpha\, \bar{u}\, z - \bar{\alpha}\, u\, \bar{z} = 0\ .$$

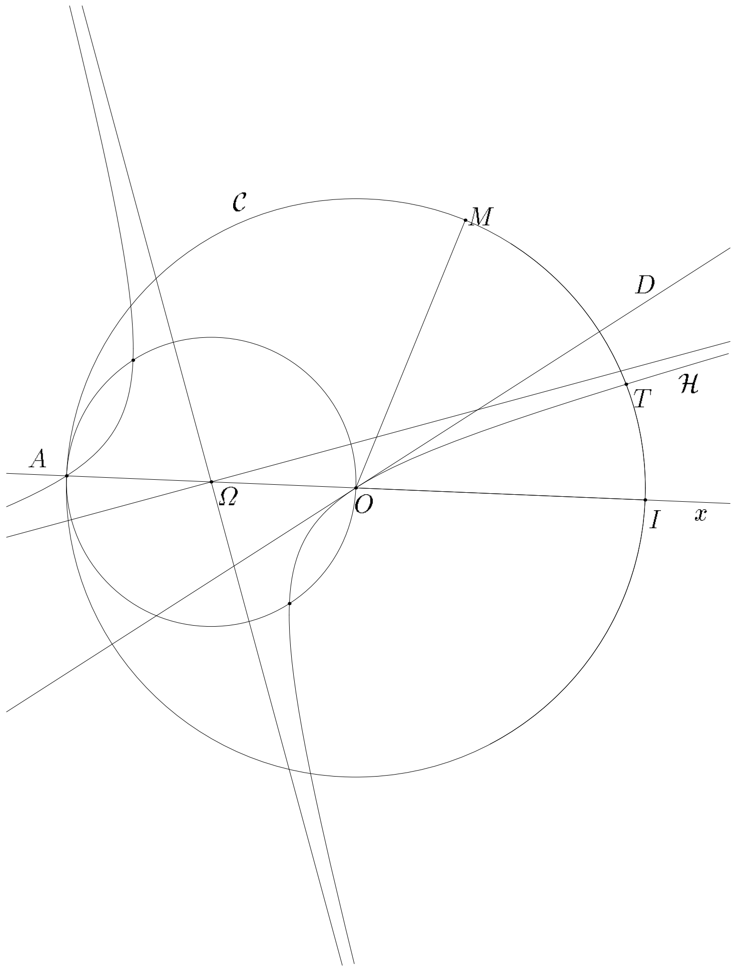
Ces hyperboles passent par l'origine; leur centre est le point d'affixe :

$$-\frac{\bar{\beta}}{2\, \bar{\alpha}} = \frac{\alpha\, \bar{u}}{2\, \bar{\alpha}}\ .$$

Le quatrième point d'intersection avec le cercle $\mathcal{C}$ est d'affixe $\gamma = \alpha\, \bar{u}/\bar{\alpha}$; il s'agit du symétrique de l'origine par rapport au centre de l'hyperbole. Ce point aussi est le symétrique du point d'affixe u dans la symétrie autour de la droite dirigée par α, puisque $u\, \gamma = \alpha^2$. Enfin les axes de symétrie de l'hyperbole sont les droites passant par le centre et dirigées par les racines carrées de α. Tout ceci suffit à constuire l'hyperbole, mais on peut quand même remarquer que la tangente à l'origine est la droite d'équation $\alpha\, \bar{u}\, z + \bar{\alpha}\, u\, \bar{z} = 0$, qu'on peut assez facilement placer sur la figure.

2.3

Mais vu l'impossibilité pour Cabri de choisir parmi les 4 intersections du cercle et de l'hyperbole, on est amené à faire en sorte qu'on puisse effectivement séparer les 4 solutions, ou seulement isoler la racine cherchée, celle d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/3}$, si $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\theta \in] - \pi, \pi]$. Pour les trois racines cubiques de u cela ne pose pas de problème : la racine cherchée est toujours la seule dans l'arc du cercle compris entre les angles $-\pi/3$ et $+\pi/3$; il suffit qu'on soit sûr que le quatrième point n'est pas sur cet arc, pour qu'on puisse isoler cette solution (intersection d'un arc de cercle et de l'hyperbole). Une manière simple et symétrique par rapport à la variation de u, est de choisir, parmi toutes les hyperboles possibles, celle dont le quatrième point d'intersection avec le cercle est le point d'affixe -1. Le centre de l'hyperbole est alors le point d'affixe $-1/2$. On vérifie que si D est la bissectrice interieure en O du triangle formé par les points M et I d'affixes respectives u et 1, les asymptotes de l'hyperbole sont parallèles aux bissectrices des droites Ox et D.



3 Construction de l'heptagone régulier

3.1

Les constructions possibles sont liées aux factorisations du polynôme cyclotomique $\Phi_6 = \frac{X^7-1}{X-1}$. On peut évidemment factoriser ce polynôme en produit de trois polynômes du second degré de la forme $X^2 + r_i X + 1$ où les r_i sont les 3 zéros réels d'un polynôme de degré 3 à coefficients entiers. Cela conduit sans doute à des constructions, mais probablement longues, en particulier parce qu'une conique ne peut pas couper la droite réelle en 3 points. Une autre façon est de chercher des factorisations en produit de deux polynômes de degré 3 dont les coefficients sont constructibles à la règle et au compas. Les coefficients de ces facteurs sont nécessairement dans le corps cyclotomique K_7 (engendré par $\omega = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi/7}$), qui est de dimension 6 sur $\mathbf{Q}$. Le degré de ces coefficients doit diviser 6 et être une puissance de 2, donc c'est 1 ou 2 (l'un au moins est de degré 2 sinon Φ_6 serait factorisable dans $\mathbf{Q}$). On est donc amené à chercher s'il existe des entiers a, b, c (modulo 7) tels que les fonctions symétriques de $\omega^a, \omega^b, \omega^c$ soient de degré 1 ou 2. Avec le produit on obtient ω^{a+b+c} d'ordre 1 ou 2, ce qui n'est possible que si $a+b+c=0$ modulo 7, puisque (en dernière raison) le polynôme cyclotomique est irreductible. Cette condition étant vérifiée, le double produit est $\omega^{-a} + \omega^{-b} + \omega^{-c}$, qui est le conjugué de $\omega^a + \omega^b + \omega^c$; on voit finalement que la seule condition est que $u = \omega^a + \omega^b + \omega^c$ soit de degré 2, et $a+b+c=0$ modulo 7. Le premier couple possible $a=1, b=2$ (et $c=4=-3$) convient. C'est sans doute lié au fait que l'application $z \mapsto z^2$ est une permutation des 6 zéros du polynôme cyclotomique, qui est décomposée en deux cycles d'ordre 3. Un calcul facile prouve que $\omega + \omega^2 + \omega^4 = u$ vérifie $u^2 + u + 2 = 0$. Les autres zéros de Φ_6 sont $\omega^3, \omega^{-2}, \omega^{-1}$ qui sont les conjugués des précédents; avec ces considérations on arrive à :

$$\Phi_6 = (X^3 - u\,X^2 + \bar{u}\,X - 1)\,(X^3 - \bar{u}\,X^2 + u\,X - 1)\ .$$

3.2

Le but est d'obtenir les zéros de $X^3 - u\,X^2 + \bar{u}\,X - 1$, qui sont des complexes de module 1, comme intersections d'une conique avec le cercle unité. Il faut pour cela ajouter un quatrième point d'affixe v (de module 1), à déterminer. Les complexes $\omega, \omega^2, \omega^4$ et v sont les zéros de :

$$(X-v)\,(X^3 - u\,X^2 + \bar{u}\,X - 1) = X^4 - (u+v)\,X^3 + (\bar{u} + u\,v)\,X^2 - (1 + v\,\bar{u})\,X + v = 0\ .$$

En multipliant par un complexe non nul $\bar{\alpha}$, on obtient le polynôme :

$$P = \bar{\alpha}\,X^4 - \bar{\alpha}\,(u+v)\,X^3 + \bar{\alpha}\,(\bar{u} + u\,v)\,X^2 - \bar{\alpha}\,(1 + v\,\bar{u})\,X + \bar{\alpha}\,v\ .$$

Il est géométriquement clair qu'on peut choisir α de telle sorte que ce polynôme soit de la forme indiquée dans l'étude préliminaire, c'est-à-dire :

$$P = \bar{\alpha}\,X^4 + \bar{\beta}\,X^3 + 2\,(r+s)\,X^2 + \beta\,X + \alpha\ .$$

Analytiquement, la seule solution possible est de choisir α tel que $v = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$ (ce qui est évidemment possible), et on vérifie que c'est effectivement une solution.

Une solution simple est de choisir parmi toutes les coniques possibles celle qui passe par le point d'affixe $v = 1$ et qui est une hyperbole équilatère.

3.3

En reprenant les notations du préliminaire, on a $\alpha = 1$, $\beta = -(1+\bar{u})$, $2\,(r+s) = 2\,s = u + \bar{u} = -1$ ($r = 0$ puisqu'on cherche l'hyperbole équilatère qui convient). L'équation complexe de l'hyperbole équilatère est donc :

$$z^2 + \bar{z}^2 - (1+u)\,z - (1+\bar{u})\,\bar{z} - 1 = 0\ .$$

Cette hyperbole équilatère passe par 1, et on voit facilement que ses axes de symétries sont dirigés par les vecteurs d'affixes 1 et i. D'après l'étude préliminaire, le centre a pour affixe $\gamma = -\frac{\bar{\beta}}{2\,\bar{\alpha}} = \frac{1+u}{2}$. En remplaçant u par sa valeur en fonction de γ dans $u^2 + u + 2 = 0$, on trouve $2\,\gamma^2 - \gamma + 1 = 0$. On remarque que comme $\frac{\gamma+\bar{\gamma}}{2} = \frac{1}{4}$, et que $\gamma\,\bar{\gamma} = \frac{1}{2}$, les points d'affixes γ et $\bar{\gamma}$ sont les intersections de la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ avec le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2}/2$. Une fois le centre construit, l'hyperbole est entièrement déterminée (on a déjà 4 points en utilisant 1 et ses symétriques). On obtient toutes les racines en prenant les conjuguées des 3 racines obtenues.

3.4 Construction